

STUDIO ATTUARIALE VISINTIN & ASSOCIATI
SAVA S.R.L.

Febbraio 2023

White Paper

Asset Allocation Previdenziale

I problemi di campionamento
nei metodi di ottimizzazione
numerica – accenni.

SCRITTO DA

ANDREA TAMARO
MARCO SCAGLIONE

1 Introduzione

Questo documento tratta una possibile soluzione a una delle principali problematiche emerse nel corso del processo di evoluzione delle strategie di asset allocation previdenziale. Negli ultimi anni, infatti, ci si è spesso scontrati con la necessità, da parte degli Enti Previdenziali (Fondi o Casse), di definire obiettivi di ottimizzazione sempre più complessi.

Tra le cause principali della crescente complessità vi è, in primis, la tendenza (necessaria) di suddividere il portafoglio di riferimento in asset class via via più granulari. In aggiunta, si osserva all'interno dell'universo investibile, un crescente numero di fonti di rischio osservabili o potenziali (globalizzazione, cyber risk, crisi climatica, intelligenza artificiale, finanza decentralizzata, inflazione, ecc.).

Per gestire in modo efficiente una realtà sempre più complessa si possono adottare i modelli iterativi di asset allocation. La caratteristica principale di questo approccio è la possibilità di definire funzioni obiettivo, non gestibili in forma chiusa, e risolvere così problemi di ottimizzazione che non potrebbero essere affrontati con i metodi tradizionali (p.es. a causa dell'interdipendenza tra scenario economico e previdenziale dovuta all'effetto che l'inflazione ha sia sul rendimento reale che sulle prestazioni previdenziali).

In questi casi, l'ottimizzazione avviene verificando la bontà di diverse soluzioni appartenenti all'insieme delle soluzioni ammissibili (di cui si dirà in seguito). L'affidabilità dei risultati ottenuti con questa tipologia di approcci è legata alla capacità di coprire, con la selezione iniziale, l'insieme delle soluzioni ammissibili con un'adeguata granularità.

Sulla base di quest'ultima considerazione nasce l'oggetto del documento, ovvero il **corretto campionamento** all'interno di uno spazio campionario multidimensionale, vincolato e a somma costante.

2 Il campionamento in uno spazio vincolato multidimensionale

Per chiarire l'ambito, di seguito un esempio pratico ovvero la necessità di estrarre alcune possibili asset allocation di un portafoglio suddiviso in 29 asset class, ognuna con i suoi vincoli di massimo e minimo, oltre ai vincoli specifici (p.es: liquidità non superiore al 15%).

Considerando inizialmente soltanto il problema di scegliere in quali asset class investire (0 / 1), si determinerebbero 2^{29} possibili combinazioni da testare. La gestione di questa matrice (29 righe e 2^{29} colonne), richiederebbe più di 30 Gb di RAM, rendendo di fatto impossibile

affrontare questo problema con gli hardware attualmente più diffusi (8 Gb di RAM). Si riporta nella Tabella 1, un esempio con 3 asset class.

	Ptf. 1	Ptf 2	Ptf 3	Ptf 4	Ptf 5	Ptf 6	Ptf 7	Ptf 8
Asset Class 1	1	0	1	0	1	0	1	0
Asset Class 2	1	1	0	0	1	1	0	0
Asset Class 3	1	1	1	1	0	0	0	0

Table 1: esempio di "selezione delle asset class" in un portafoglio con 3 asset class.

Per avvicinarsi al problema reale, si ipotizzi ora che ognuna delle 29 asset class in portafoglio possa assumere 10 diversi valori diversi, ovviamente maggiori di 0 e inferiori a 1 (p.es. 0%, 1%, 2%, ..., 10%). In questo caso si otterrebbero 10^{29} possibili combinazioni da testare, la cui gestione richiederebbe un numero di Gb di RAM degno dell'intero Cloud Service di Google.

In aggiunta al problema relativo alla grandezza delle matrici da gestire, lo spazio campionario che caratterizza le possibili asset allocation di un portafoglio è anche caratterizzato da:

- vincoli specifici di asset class (es. liquidità non superiore al 15%);
- vincoli di gruppo (es. esposizione a valute estere non superiore al 30%);
- vincolo di somma unitaria delle diverse componenti.

La presenza dei predetti vincoli potrebbe sembrare una semplificazione al problema in oggetto in quanto essi limitano lo spazio campionario ammissibile. In verità, per il processo di campionamento statistico la presenza di vincoli è una complicazione, in quanto, detto in parole povere, l'estrazione "casuale" non può più essere così casuale.

3 I metodi di estrazione di un campione omogeneo

Al fine di approfondire la complessità causata dalla presenza dei vincoli, di seguito alcuni esempi di campionamento classici applicato al caso in esame. Si prenda ad esempio la sequenza di Sobol, rappresentata nella Figura 1.

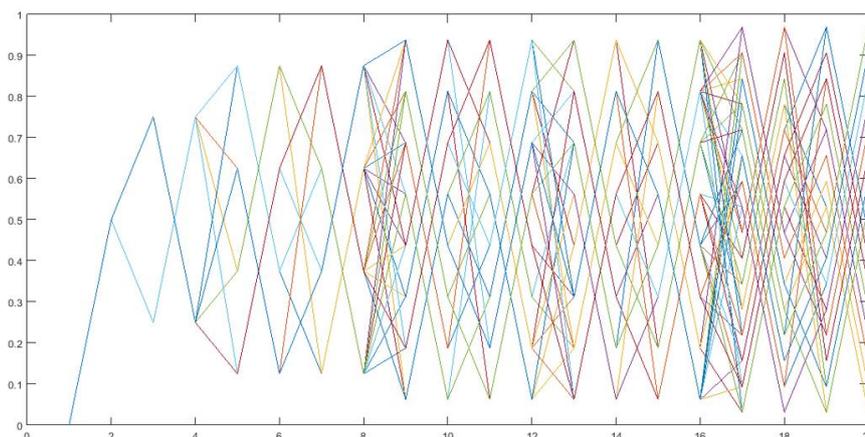


Figura 1: Primi 20 numeri di 50 sequenze generate con la sequenza di Sobol

Questa tipologia di generatore permette, per ogni singola asset class, di coprire uniformemente il segmento $[0,1]$. La formulazione, però, perde efficacia nel campionamento multidimensionale, considerando le diverse asset class congiuntamente. Infatti, l'operazione di traslazione dei vettori generati dal segmento $[0,1]$ all'insieme di accettabilità (vincolo di somma unitaria), porta alla convergenza alla distribuzione Normale (vedasi Teorema del Limite Centrale), generando un'estrazione casuale che non copre adeguatamente l'insieme di accettazione.

Come è possibile osservare dalla Figura 2, infatti, i valori medi di ciascuna classe sono sostanzialmente tutti uguali e pari a $1/29 \approx 3.45\%$ mentre i valori massimi di concentrazione per ogni singola classe non superano mai il 10%. Con questa procedura, quindi, non verrebbero mai testate asset allocation che prevedono asset class con pesi del 15% o 20% (valori che spesso invece si osservano).

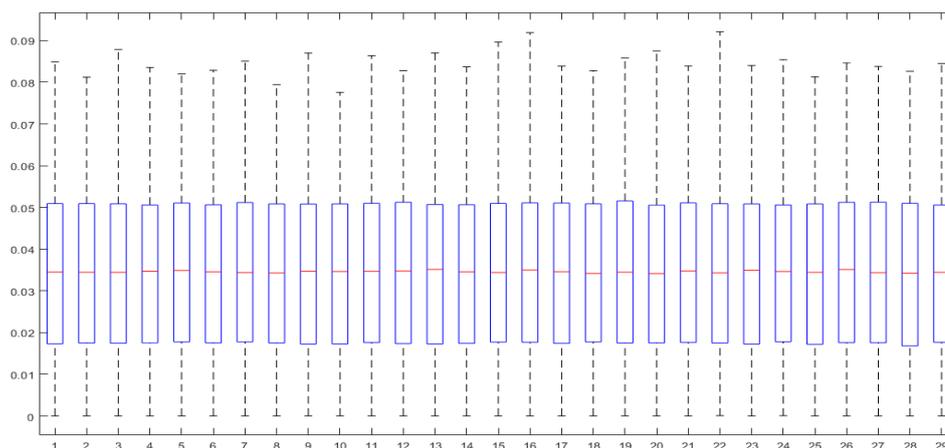


Figura 2: Distribuzione delle asset class generata usando la sequenza di Sobol

Una soluzione al precedente problema è rappresentata dall'algoritmo RandFixedSum (Stafford 2006, Emberson et al. 2010) che effettua campionamenti di vettori a somma fissa (nel nostro caso a somma unitaria).

Questo approccio, inoltre, consente la definizione di un vincolo aggiuntivo (in aggiunta al predetto vincolo di somma). Si possono definire infatti i valori minimo e massimo, validi per tutte le classi di attività ($a < x_i < b$). Per non escludere spazio campionario ammissibile è quindi necessario fissare per tutte le classi un vincolo molto ampio (p.es. 0% - 50%).

Come si evince dalla Figura 3, la distribuzione campionaria che si ottiene è significativamente più “sparsa” sui valori ammissibili rispetto alla sequenza di Sobol riscalata analizzata in precedenza.

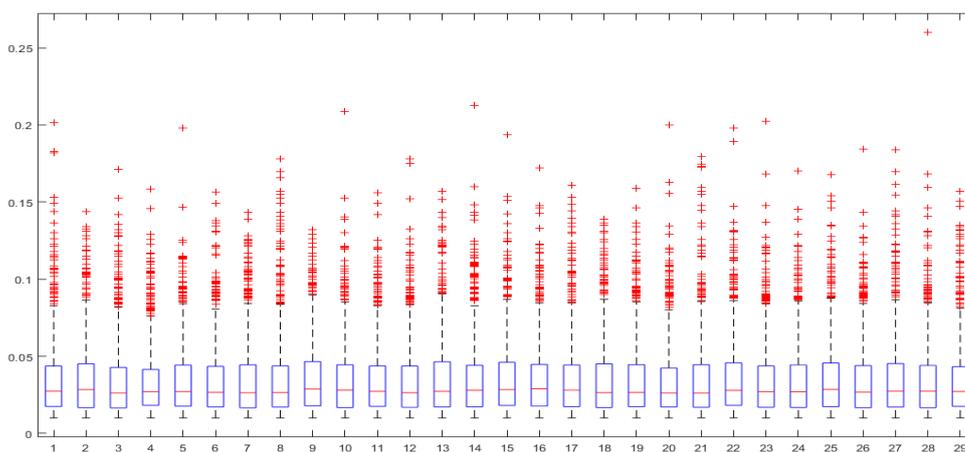


Figura 3: Distribuzione delle asset class generata con la funzione RandFixedSum

Infine, si riporta la soluzione che ha evidenziato i migliori risultati, in particolare per quanto riguarda il numero di campionamenti fuori dallo spazio ammissibile. L’algoritmo utilizzato è il “Dirichlet Rescale” (Griffin, Bat & Davis, 2020), naturale estensione dell’algoritmo RandFixedSum. Questo algoritmo, infatti, consente di definire i vincoli specifici di ogni asset class ($a_i < x_i < b_i$), come si può osservare nella Figura 4 seguente.

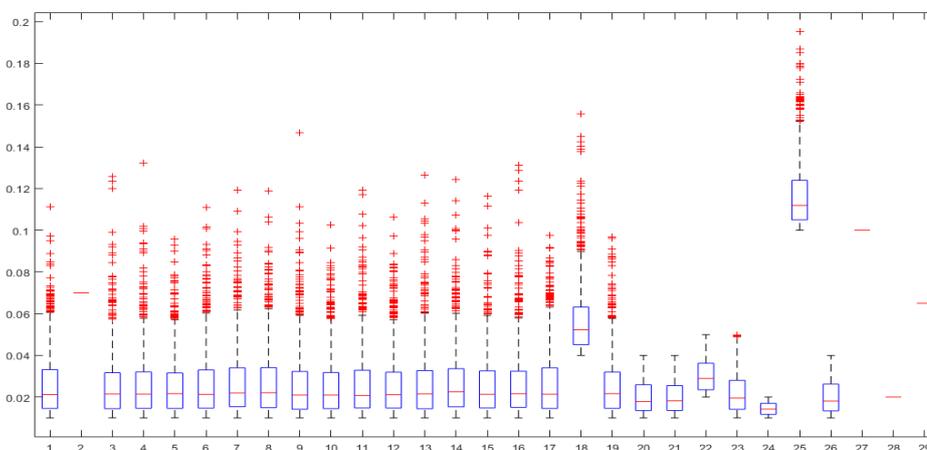


Figura 4: Distribuzione delle asset class generata con l’algoritmo Dirichlet Rescale

4 Metodi alternativi

Sulla base di quanto descritto nelle sezioni precedenti è evidente che non è facile ricorrere a un approccio diretto sull'intero spazio campionario e quindi, come spesso accade, soluzioni alternative si ottengono scomponendo il problema in più parti da affrontare separatamente.

la prima soluzione è quella di dividere il processo in due sotto-processi che si differenziano per il numero di asset class (granularità di analisi). Il primo si basa su valutazione di portafoglio ottimale che può essere fatta ad un livello più aggregato di asset class. Dopo aver definito il portafoglio ottimale in termini aggregati (macro-asset class) si può procedere con il secondo processo ovvero all'analisi delle asset class di dettaglio. I pesi ottenuti per le diverse macro-asset class in fase uno diventano i vincoli di somma delle asset class contenute al loro interno (limitando significativamente lo spazio campionario ammissibile).

Nonostante la validità teorica dell'approccio appena descritto, l'alternativa utilizzata più comunemente prevede un approccio misto tra quello tradizionale e quello numerico. Ipotizzando che i risultati ottenuti dai metodi tradizionali non si discostino troppo da un portafoglio globalmente ottimale, questa metodologia alternativa consentirebbe di definire un portafoglio di partenza con un approccio di ottimizzazione tradizionale (media varianza, media C-VaR, etc.). Sulla base dell'asset allocation così ottenuta, viene definito uno spazio campionario limitato all'intorno del portafoglio ottimale ottenuto con il metodo tradizionale. Anche questo approccio limita considerevolmente lo spazio campionario a disposizione, aumentando quindi la densità dei punti al suo interno e riducendo la grandezza delle matrici risultanti.

5 Conclusioni

L'approccio di asset allocation tradizionale ha come unico obiettivo l'individuazione del portafoglio ottimale inteso come quel portafoglio che, a parità di rischio, fornisce il maggior rendimento atteso o, viceversa, a fissato rendimento minimizza il rischio. Spesso in questo contesto bisogna fissare anche un orizzonte temporale di riferimento su cui effettuare l'ottimizzazione.

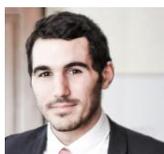
I principali limiti di questo approccio sono collegati ad una valutazione improntata all'asset side, in quanto considera le passività solo in termini di cash flow deterministici (p.es. spesso non viene considerata l'aleatorietà dell'inflazione futura sui flussi previdenziali).

Con l'evoluzione tecnologica e le soluzioni di calcolo in *cloud* si è potuto passare a tecniche di valutazione che prevedono un maggior numero di calcoli ed elaborazioni. Questa possibilità ha aperto la strada a metodologie di valutazione con obiettivi di ottimo significativamente più

complessi. È stata quindi introdotta, tra le altre, l'ottimizzazione sull'indice di *funding ratio* o sul **tasso di sostituzione**, mono e multi-periodale. Variabili di questo tipo incorporano, oltre al rendimento degli attivi, anche altre variabili di rischio come l'effetto dell'inflazione sulla rivalutazione delle prestazioni o l'evoluzione economica / reddituale sul tasso di sostituzione.

Il nostro Studio ha sviluppato negli anni diversi algoritmi di ottimizzazione che permettono di essere flessibili in relazione al contesto di riferimento (Casse previdenziali, Fondi pensione complementari, etc.) garantendo al Cliente un approccio coerente con gli obiettivi di analisi e di valutazione.

Per ulteriori informazioni riguardo le valutazioni di asset allocation



Andrea Tamaro
Actuary, senior manager
tamaro@studio-visintin.it

STUDIO ATTUARIALE

Visintin & Associati



Trieste sede Legale e Operativa

Via San Lazzaro, 2
34122 Trieste
Telefono +39 040 36.17.03
Fax +39 040 37.20.432

Milano sede Operativa

Via Monferrato, 1
20144 Milano
Telefono e Fax +39 02 76.31.70.40

Email: attuari@studio-visintin.it