STUDIO ATTUARIALE VISINTIN &
ASSOCIATI - SAVA SRL

Maggio 2023

White Paper

Option Pricing

Black & Scholes

Vs Monte Carlo

ANDREA TAMARO

NICOLA PIRAS

ROBERTO BRUNI

Introduzione

lo scopo di questo documento è confrontare due approcci spesso utilizzati per la valutazione di strumenti finanziari derivati e, più nello specifico, per il pricing delle opzioni. Gli approcci di valutazione oggetto del confronto sono il Modello di Black & Scholes e il metodo Monte Carlo: entrambe le metodologie sono molto diffuse e, in funzione della tipologia di valutazione da svolgere, può essere più appropriato l'utilizzo dell'una o dell'altra.

1. Modello di Black & Scholes

Questo approccio di valutazione è sviluppato a partire dall'omonima equazione differenziale stocastica che, coerentemente alle ipotesi sottostanti al modello, esprime il prezzo di non arbitraggio di un generico derivato (o del corrispondente portafoglio replicante). L'equazione di Black and Scholes si ottiene imponendo l'uguaglianza tra la funzione del derivato esplicitata attraverso il Lemma di Itō e il valore attuale di un portafoglio neutrale al rischio (creato a partire dal derivato). Tale uguaglianza, che deve essere soddisfatta in assenza di opportunità di arbitraggio, ha la seguente forma:

$$\frac{\partial f(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(t,S_t)}{\partial {S_t}^2} \cdot {S_t}^2 \cdot \sigma^2 + r \cdot \frac{\partial f(t,S_t)}{\partial S_t} \cdot S_t = r \cdot f(t,S_t) \qquad [1]$$

in cui:

- r è Il tasso risk free (costante nel tempo);
- $f(t,S_t)$ è la funzione che definisce il derivato;
- S_t è il prezzo del sottostante al tempo t;
- σ è la volatilità dei rendimenti del sottostante (costante nel tempo).

Per comprendere meglio la precedente equazione differenziale è fondamentale ricordare l'ipotesi alla base del modello di B&S circa il processo stocastico che definisce il prezzo del bene sottostante. In particolare, infatti, si ipotizza che questo sia un moto browniano geometrico (di seguito, per brevità MBG). In formula:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t \qquad [2]$$

con:

- μ tasso di rendimento istantaneo;
- W_t processo di Wiener.

Tornando alla formula di pricing, questa si ottiene risolvendo l'equazione di B&S [1], ed è a tutti gli effetti lo strumento più immediato per il calcolo del prezzo delle opzioni, in quanto risolvibile in forma chiusa.

Si consideri ad esempio la formula per il prezzo di una call europea:

$$C(S,t) = S_t \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r\cdot(T-t)} \cdot N(d_2) \qquad [3]$$

Dove, in aggiunta a quanto già esplicitato precedentemente:
- T rappresenta la scadenza del contratto;
- K rappresenta lo *strike price* del contratto;
- N è la funzione di ripartizione di una Normale Standard;
- d_1 e d_2 parametri facilmente ricavabili poiché funzioni dei parametri di input.

Il calcolo del prezzo dell'opzione non richiede dunque né sforzo computazionale né capacità di programmazione stocastica. Al contempo, come già precedentemente evidenziato, ci sono alcuni punti di rigidità non superabili utilizzando la formula di Black & Scholes. In particolare, i principali sono:
- l'ipotesi di volatilità costante dei rendimenti del sottostante;
- il processo stocastico sottostante deve rispettare le caratteristiche del MBG;
- la curva dei tassi *risk free* è ipotizzata pari ad un tasso *flat*;
- il contesto di valutazione è di tipo *risk neutral*;
- l'informazione che si ottiene come output è ridotta al solo prezzo dell'opzione (o quanto ricavabile invertendo la formula quali la volatilità implicita).

2. Simulazione Monte Carlo

In generale, l'approccio Monte Carlo risponde alle criticità di valutazione e di pricing quando le distribuzioni sottostanti non permettono una valutazione in forma chiusa. Si ipotizza quindi di generare un numero di simulazioni del processo stocastico sottostante sufficientemente elevato, così da ottenere una distribuzione empirica dei valori d'interesse e tutti i momenti utili (media, deviazione standard, ecc.).

In relazione a quanto riportato in questo documento, tramite la generazione casuale degli scenari stocastici si possono determinare i rendimenti periodali del sottostante e quindi il suo valore a scadenza. Sulla base di questo si può stimare il cash-out a scadenza dell'opzione (*scenario-specific*) e, attualizzandone il valore medio, si può ottenere il prezzo dell'opzione alla data di valutazione.

Come per il modello di Black & Scholes, questo approccio prevede l'assunzione di alcune ipotesi, come ad esempio la definizione del processo stocastico utilizzato per il sottostante (non necessariamente il MGB), i parametri del modello (*risk-neutral*) e la curva dei tassi *risk-free*.

2.1 APPROCCIO STANDARD

Per sua natura, la metodologia Monte Carlo risulta più flessibile di quella di B&S e, se si utilizzano le medesime assunzioni e un numero sufficientemente alto di scenari, il valore dell'opzione stimato con la simulazione tenderà ad uguagliare il valore ottenuto con Black & Scholes.

In sostanza, è necessario ipotizzare che il prezzo in t del sottostante sia una variabile stocastica definita dalla seguente equazione:

$$S_t = S_0 \cdot exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot t + \sigma W_t\right] \qquad [4]$$

Tale funzione è la soluzione analitica rispetto al prezzo del sottostante al tempo t di un moto browniano geometrico, in cui la parte stocastica da simulare in modo casuale è solamente W_t, ovvero il processo di Wiener che ha distribuzione Normale con media 0 e varianza (t).

2.2 APPROCCIO PERIODALE

Una soluzione alternativa rispetto a quest'ultimo metodo prevede la proiezione per singoli intervalli di tempo (su ogni scenario stocastico) dei rendimenti del sottostante sulla base del processo stocastico ipotizzato. Questo metodo permette di fare anche valutazioni infra-periodali, utili ad esempio alla valutazione di opzioni americane, che possono essere esercitate in momenti diversi dalla scadenza. Inoltre, proiettando con approccio periodale si possono gestire in maniera agevole ipotesi di volatilità *time-dependent*, dove il parametro di volatilità σ_t viene a dipendere dall'indice di tempo t, coerentemente con le osservazioni della volatilità implicita di mercato.

3. Considerazioni finali e ambiti di utilizzo

Come spesso accade, quando si confrontano metodologie di valutazione differenti risulta che ciascuna presenti vantaggi e svantaggi e che la scelta di una sull'altra risolva alcuni problemi ma ne enfatizzi altri. Ciò considerato, diventa rilevante analizzare la problematica caso per caso e individuare il miglior *trade-off* in funzione dell'obiettivo.

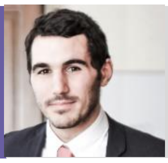
Lo Studio spesso propende per una valutazione con approccio Monte Carlo per le seguenti ragioni:

- è ormai possibile simulare un numero molto elevato di proiezioni stocastiche in tempi brevi;
- utilizzando MatLab, la gamma di modelli stocastici a disposizione è molto vasta;
- la parametrizzazione dei parametri è anch'essa gestibile su MatLab.

Lo strumento di option pricing può essere utilizzato in diversi ambiti e con diverse finalità:

- Valutazioni di *market consistency* degli scenari economici nel framework SII;
- Valutazione delle garanzie finanziarie in ambito sia assicurativo che previdenziale;
- Determinazione del portafoglio replicante in ottica di *cash-flow matching* stocastico;
- Analisi indipendente sui costi caricati dal gestore / emittente di un portafoglio *option-based*.

Per ulteriori informazioni riguardo gli strumenti di Option Pricing



Andrea Tamaro
Senior Actuary
tamaro@studio-visintin.it

Nicola Piras
Junior actuarial consultant
piras@studio-visintin.it

Roberto Bruni
Actuary
bruni@studio-visintin.it

STUDIO ATTUARIALE
Visintin & Associati

Trieste sede Legale e Operativa
Via San Lazzaro, 2
34122 Trieste
Telefono +39 040 36.17.03
Fax +39 040 37.20.432

Milano sede Operativa
Via Monferrato, 1
20144 Milano
Telefono e Fax +39 02 76.31.70.40